非線型格子のつらなり波とソリトンとの関係 (ソリトンの研究会報告集)

戸田, 盛和

数理解析研究所講究録
83巻 1970年 83-93

非線型格子のつらなり波とソリトンとの関係

東教大 理　戸田盛和

§1 運動方程式

非線型のバネでつながれた1次元の鎖を考える。バネの自然長からの変化をrとし，バネの位置エネルギーを

$$\phi(r) = a(e^{-br} + r) \tag{1}$$

とする。このとき運動方程式は

$$m\ddot{r}_n = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \tag{2}$$

となる。ここで

$$br_n \to r_n \ , \quad \sqrt{\frac{ab}{m}}\, t \to t \tag{3}$$

と書き変えると，運動方程式は

$$\ddot{r}_n = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}} \tag{4}$$

となる。今後，この形で考えよう。

$$e^{-r_n}-1=y_n \qquad \text{または} \qquad r_n=-\log(1+y_n) \tag{5}$$

とおくと，運動方程式は

$$-\ddot{r}_n=\frac{d^2}{dt^2}\log(1+y_n)=y_{n-1}+y_{n+1}-2y_n \tag{6}$$

となる。ここで

$$\int^t y_n\,dt=s_n \quad , \quad r_n=-\log(1+\dot{s}_n) \tag{7}$$

とおけば，運動方程式を一回まで積分して

$$-\dot{r}_n=\frac{d}{dt}\log(1+\dot{s}_n)=s_{n-1}+s_{n+1}-2s_n \tag{8}$$

となる。ただし右辺で積分定数 $\alpha_n=0$ とおいた。これは s_n を適当に定義すれば可能である。さらに

$$\int^t s_n\,dt=S_n \quad , \quad r_n=-\log(1+\ddot{S}_n), \tag{9}$$

$$\therefore \quad e^{-r_n}-1=\ddot{S}_n \tag{9'}$$

とおけば

$$-r_n=\log(1+\ddot{S}_n)=S_{n-1}+S_{n+1}-2S_n \tag{10}$$

となる。ここでも積分定数を適当に選んで

$$r_n=2S_n-S_{n-1}-S_{n+1} \tag{11}$$

になるようにした。(10) の右の等式を運動方程式と考えることができる。ただし，このときは (11) によってバネの長さが与えられる。

§2. つらなり波

楕円テータ関数 $\vartheta_0(x)$ は周期 1 の関数である。これは次の等式を満足する。

$$\frac{\vartheta_0(x+y)\vartheta_0(x-y)}{[\vartheta_0(x)]^2} = C\left\{1+\mu\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_0(x)\right\} \qquad (1)$$

ただし，ここに

$$C=C(y)=\left[\frac{\vartheta_0(y)}{\vartheta_0(0)}\right]^2\left\{1-\left(1-\frac{E}{K}\right)sn^2(2Ky)\right\} \qquad (2)$$

$$\mu=\mu(y)=\frac{sn^2(2Ky)}{(2K)^2\left\{1-\left(1-\frac{E}{K}\right)sn^2(2Ky)\right\}} \qquad (3)$$

K，E はそれぞれ第 1 種および第 2 種の完全楕円積分，sn は Jacobi の楕円関数である。

(1) と運動方程式 (1−10) とを比べると，次のような特解があることがわかる。

$$S_n=\log\left[\vartheta_0\left(\nu t\mp\frac{n}{\lambda}\right)/C^{n^2/2}\right] \qquad (4)$$

ただし，ここに ν と λ とは $\nu^2=\mu$ あるいは

$$(2K\nu)^2=\left\{\frac{1}{sn^2\frac{2K}{\lambda}}-1+\frac{E}{K}\right\}^{-1} \tag{5}$$

によって関係づけられる。これが波の分散関係である。

また，この描写によってバネは伸びていることがわかる。例えばN個の質点を含む鎖が輪を形作っている（周期条件）とすると　$r_1=r_{N+1}$　であり，鎖の長さは（1−11）を採用し

$$r_1+r_2+\cdots+r_N=N\log C\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6}$$

で与えられる。したがって

$$\bar{r}=\log C \tag{7}$$

はバネの平均の伸びを与える。

ϑ 関数の性質により

$$\dot{S}_n=s_n=\nu\frac{\vartheta_0'(\nu t\mp\frac{n}{\lambda})}{\vartheta_0(\nu t\mp\frac{n}{\lambda})}=2K\nu\,Z\left(2\left(\nu t\mp\frac{n}{\lambda}\right)K\right) \tag{8}$$

$$=2K\nu\int_0^{2(\nu t-\frac{n}{\lambda})K}\left(dn^2u\mp\frac{E}{K}\right)du \tag{9}$$

したがって　（1−7）により，あるいは（1−9'）により

$$e^{-r_n}-1=\dot{s}_n=(2K\nu)^2\left[dn^2\left\{2\left(\nu t\mp\frac{n}{\lambda}\right)K\right\}-\frac{E}{K}\right] \tag{10}$$

dn は周期 $2K$ の関数であり，dn^2u の平均は E/K である。sn, dn などの Jacobi の楕円関数の母数を k と書くと $0\leq k\leq 1$　であり，$dn^2u=1-k^2sn^2u$　の関係がある

る。$k \ll 1$ ならば波は正弦波に近いが，$k \doteqdot 1$ になると，波はとがってくる。(10)はこのようなつらなり波を与え，その波長はλである。

§3．つらなり波の分解

(2-10) あるいは間接的に (2-4) で与えられるつらなり波を考える。ϑ_0 関数は

$$\vartheta_0(x)=\vartheta_0(x,q)=\varphi(q)\prod_{r=1}^{\infty}(1-2q^{2r-1}\cos 2\pi x+q^{4r-2}) \qquad (1)$$

ただし $\varphi(q)=\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r})$ である。すぐわかるように

$$(1-2q_1\cos 2\pi x+q_1^2)(1-2q_1\cos 2\pi(x\pm\tfrac{1}{2})+q_1^2)=1-2q_1^2\cos 4\pi x+q_1^4$$

であるから，$\varphi(q)$ を q だけの関数として

$$\vartheta_0(2x,q^2)=\varphi(q)\cdot\vartheta_0(x,q)\vartheta_0(x\pm\tfrac{1}{2},q) \qquad (2)$$

したがって（右方へ伝わる波を記す。左方へ進む波も同様）

$$\begin{aligned}S_n&=\log\vartheta_0(\nu t-\frac{n}{\lambda},q)+\text{const}\\&=\log\vartheta_0\left(\frac{\nu}{2}t-\frac{n}{2\lambda},\sqrt{q}\right)+\log\vartheta_0\left(\frac{\nu}{2}t-\frac{n+\lambda}{2\lambda},\sqrt{q}\right)\\&\qquad+\text{const}\end{aligned} \qquad (3)$$

と書ける。したがって波長λのつらなり波は，波長2λのつらなり波をλだけずらして重ね合わして作ることがで

きる。いいかえれば，つらなり波は，波長が2倍の二つのつらなり波に分解できる。これを $e^{-r_n}-1$ について書くと

$$e^{-r_n}-1=(2K(k)\nu)^2\left[dn^2\left\{2\left(\nu t-\frac{n}{\lambda}\right)K(k),k\right\}-\frac{E(k)}{K(k)}\right]$$

$$=(K(\kappa)\nu)^2\left[dn^2\left\{\left(\nu t-\frac{n}{\lambda}\right)K(\kappa),\kappa\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right.$$

$$\left.+dn^2\left\{\left(\nu t-\frac{n}{\lambda}-1\right)K(\kappa),\kappa\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right] \qquad (4)$$

ここにパラメーター q と母数 k と関係は一般に

$$q=e^{-\pi K(k')/K(k)} \qquad (k'=\sqrt{1-k^2}) \qquad (5)$$

であるから，上式の母数 k と κ の関係は

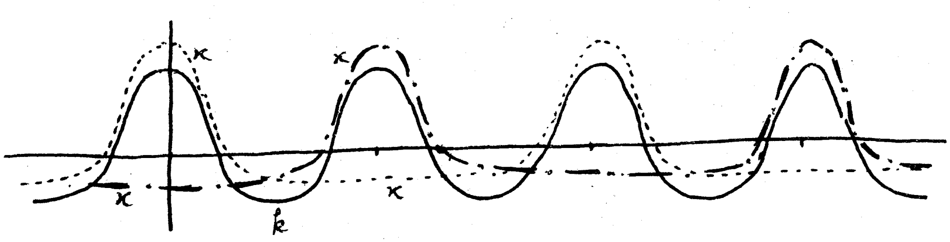
$$\sqrt{q}=e^{-\pi K(\kappa')/K(\kappa)} \qquad (\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}) \qquad (6)$$

あるいは

$$\frac{K(k')}{2K(k)}=\frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \qquad (7)$$

で与えられる。

この場合の非線型の重ね合わせを下に図示する。



これは波形が分解，あるいは逆に合成されることを意味する。しかし，分散関係（νとλとの関係）は全体としての波形（波長λ，母数k）の式（2-5）によってきまるもので，分解された成分波（波長2λ，母数κ）による分散関係によってきまるものではない。ここに非線型の波の分解・合成の特長の一つがみられる。

波長2λの成分波は，さらにそれぞれ2個の波長4λの波に分解できる。しかし，さらに一般に，3個，4個，… など任意の整数個のつらなり波に分解できる。これは次のような(3)式の拡張によって示される。

$$\vartheta_0(lx, q^l) = \frac{\phi(q^l)}{\{\phi(q)\}^l} \prod_{s=0}^{l-1} \vartheta_0\left(x + \frac{s}{l}, q\right) \qquad (8)$$

この式を用いると（1-9'）により，（2-10）は

$$e^{-r_n} - 1 = \left(2K(\kappa)\frac{\nu}{l}\right)^2 \sum_{s=0}^{l-1}\left[dn^2\left\{2\left(\frac{\nu}{l}t - \frac{n}{l\lambda} + \frac{s}{l}\right)K(\kappa)\right\} - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right] \qquad (9)$$

ただしκは

$$\frac{K(k')}{l\,K(k)} = \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \qquad \left(\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}\right) \qquad (10)$$

でkと関係づけられ，νはλと（2-5）の分散関係で結ばれる。この分解は波長λのつらなり波を，波長$l\lambda$の波l個がλだけずらしたものに分解することである。また，この逆の合成をも意味している。

§4. 周期条件（輪）のソリトン，つらなり波

いままでは，無限鎖（$-\infty<n<\infty$）のつらなり波のように扱ってきたが，この周期的な波は波長の整数倍の長さの輪（周期条件）の中のものと考えることができる。そして前節の分解・合成を周期条件のものとすることができる。分解は前節と同じである。

N個の質点 $n=1,2,\dots,N$ からなる輪を考え，質点 $n=0$ は $n=N$ と同じであるとする。$r_{N+1}=r_1$．

この輪の中にただ一つの山をもつ(2-10)の形の解を周期条件下のソリトンといってもよいであろう。これは，

$$e^{-r_n}-1=(2K(\kappa)\nu_s)^2\left[dn^2\left\{2\left(\nu_s t-\frac{n}{N}\right)K(\kappa)\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right]$$

（母数$=\kappa$）

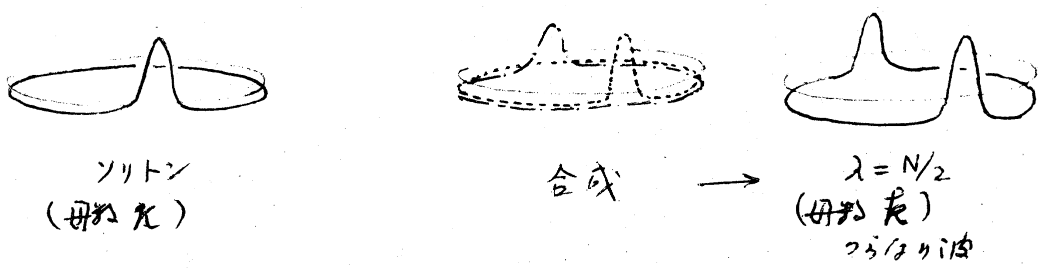
の形で与えられる。κは母数，ν_sはソリトンに付随する振動数で

$$(2K(\kappa)\nu_s)^2=\left\{\frac{1}{sn^2\frac{2K(\kappa)}{N}}-1+\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right\}^{-1}$$

（母数$=\kappa$）

で与えられる。

このようなソリトンを2個，たがいに$N/2$だけずらして同じ向きに進むようにおくと，(3-4)の規則により合成されて $\lambda=N/2$ のつらなり波が輪の中にできる。これは式(3-4)で $\lambda=N/2$，$\nu=2\nu_s$ とおいて得られる。



これは p.6 の図を円筒形にまるめたものである。

一般化（3-8〜10）によれば，周期条件のもとにおけるつらなり波（normal mode）は，その中の波の数だけのソリトンに分解できるわけである。また，波の数が l の倍数ならば，l 個の　つらなり波に分解できるわけである。

§5. 無限空間のソリトンによる分解

（3-8〜10）において $l \to \infty$ にする場合，あるいは周期的な輪において $N \to \infty$ にする場合，つらなり波はすべてソリトンの集まりで表わされることになる。はじめから無限個に分解するには，次の公式が便利である。

$$\vartheta_0(x) = \vartheta_0(0)\, e^{-\frac{\pi K x^2}{K'}} \prod_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\cosh\left\{\frac{\pi K}{K'}(x-y)\right\}}{\cosh\left(\frac{\pi K}{K'} y\right)} \tag{1}$$

波長 λ のつらなり波において $x = \nu t - n/\lambda$ とおき，

$S_n = \log \vartheta_0(x) + \mathrm{const}$ から $e^{-r_n} - 1 = \dot{s}_n = \ddot{S}_n$ を作れば

$$e^{-r_n} - 1 = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \beta^2 \operatorname{sech}^2(\beta t - \alpha n - \alpha\lambda y) - 2\beta\nu \tag{2}$$

ただし

$$\alpha = \frac{\pi K}{K'\lambda}, \qquad \beta = \alpha\lambda\nu \tag{3}$$

を得る。波の速度，分散関係はもちろん2-5で与えられる。

(2)式の右辺 Σ の中の sech^2 の項はいままで(無限空間の)ソリトンとして知られていたものである。第2項の $-2\beta\nu$ は(1)式の $e^{-\pi K x^2/K'}$ から来るものである。これは周期条件の下で考えたp10の図のソリトンのように，あるいはp6の図のようにつねに $e^{-r_n}-1<0$ の部分，すなわち谷の部分をもっている。この谷の深さは周期 N を大きくするにつれて浅くなっていくが $y=-\infty$ から ∞ まで和をとるようになる極限（周期条件で $N\to\infty$ に相当）でも有限の寄与を残すことになるのである。

§6. ソリトン

周期条件下のソリトンについて $N\gg1$ の極限を考えよう。前節(5-3)からもわかるように $N=\lambda\gg1$ とすると $\alpha\to0$ となり，同様に $\nu\to0$, $\beta\to0$ にもなる。これをさけなければソリトンは消えてしまうから，母数 k を1に近づける必要がある。こうすると $K/K'\to\infty$ となって(5-3)の α は有限におさえられる。この極限では(5-1)は，あるいは

$$\vartheta_0(x) \simeq 2\sqrt{K/K'}\; e^{-\frac{\pi K}{K'}\left(\frac{1}{4}+x^2\right)} \cosh\!\left(\frac{\pi K}{K'}x\right) \tag{1}$$

としてよい。これから $\beta=\frac{\pi K}{K'}\nu=$ 有限の極限として

$$e^{-r_n}-1 \cong \beta^2 \operatorname{sech}^2(\alpha n-\beta t)-2\nu\beta \qquad \left(-\frac{N}{2}\leq n<\frac{N}{2}\right) \quad (2)$$

を得る。ただしこの極限（$k\to 1$, $K'\to \pi/2$）では

$$\beta \cong 2K\nu \simeq \sinh\alpha, \quad 速度=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \nu=\beta/\alpha N \qquad (3)$$

が成り立つ。(2) の才2項は $N\to\infty$ で 0 であるが N が有限な限り残さなくてはならない。

$e^{-r_n}-1>0$ の山の部分は鎖の縮みを $e^{-r_n}-1<0$ の部分は伸びを与える。(2) の才2項は伸びを与えるものである。全体としての伸びを求めてみると $N\gg 1$ の場合として

$$\sum_{n=1}^{N} r_n = 2N\alpha\left\{\left(\frac{\sinh\alpha}{\alpha}\right)^2-1\right\}>0$$

これは常に正であって，ソリトンは山の部分で圧縮を与えるにも拘らず，k のすその部分で無限小ではあるが $\left(O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$，無視できない伸びの寄与を与え，全体としてソリトンは伸びを与えるものであることがわかる。